

## О некоторых методах формирования и управления портфелем активов. II.

---

Берколайко М.З., Руссман И.Б.

... У меня был талантливый учитель – мои проигрыши. Психологи утверждают, что у многих трейдеров тяга к проигрышам заложена на подсознательном уровне. Я не из их числа. Я всегда считал проигрыши своего рода платой за образование, которое позволит мне стать первоклассным трейдером.

Томас Р. Демарк «Технический анализ – новая наука»

### Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1], поэтому мы продолжаем начатую в [1] нумерацию частей, формул и рисунков. Напомним, что в [1] дан подготовительный материал для нового метода оценки и минимизации риска и, кроме того, рассмотрены аналогии между формированием портфеля активов и конструированием надежных электрических схем из ненадежных элементов.

Исследования и в первой, и в настоящей частях работы базируются на одном и том же принципиальном соображении: портфель рассматривается не как нечто, приносящее (желательно максимальный) доход, а как система переменной структуры, которая должна в заданное время  $t_{пл}$  достичь поставленной цели. Эта цель – получение определенного, заранее запланированного согласно конъюнктуре рынка, дохода  $A_{пл}$ , причем портфель и формируется, и реорганизуется в рамках заданного бюджета  $B$ . Таким образом, целью формирования и управления служит обретение при закрытии позиции заранее заданной стоимости портфеля. Следовательно, положительным результатом управления (выигрышем) для нас является достижение цели. Нам неизвестно, в каком смысле употребляет слово

«проигрыш» известный трейдер Т.Р.Демарк, чье высказывание мы вынесли в эпиграф, но думаем, что под проигрышем он понимает недостижение поставленной цели. Степень угрозы этого недостижения мы и рассматриваем как риск, минимизация которого позволит, по крайней мере, существенно снизить упомянутую Демарком «плату за образование».

### Часть III. Управление портфелем активов.

#### Прогнозирование изменения рыночного индекса.

**III. 1.** В этом разделе мы придадим точный смысл введенному ранее пониманию риска как степени угрозы потери управляемости.

Начнем с общих положений, имеющих отношение не только к управлению портфелем активов. Допустим, что за время  $t_{пл.}$  нам нужно добиться результата, количественное выражение которого есть  $A_{пл.}$ . Допустим также, что существует минимальная скорость  $V_{min}$  его движения во времени (это минимальная скорость производства результата) и максимальная скорость  $V_{max}$ , [2].

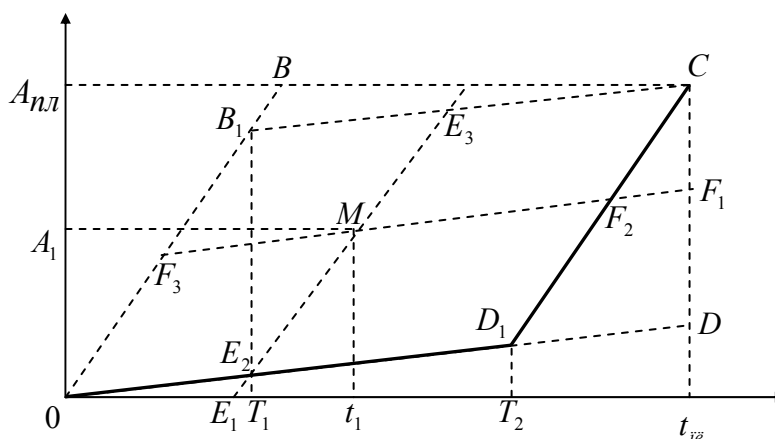


Рис. 3.

На рис. 3 уравнение прямой  $OB$  есть  $A = V_{max} \cdot t$ , уравнение  $OD$  –  $A = V_{min} \cdot t$ .

Если в процессе движения объект попадает в треугольник  $D_1CD$ , то достижение цели в заданное время становится невозможным, поэтому этот треугольник становится запретной областью и приближение к нему увеличивает угрозу потери управляемости. Ясно, что риск, отражающий величину этой угрозы, должен стремиться к бесконечности при приближении точки к прямой  $CD_1$ .

Мы также будем считать запретной область, лежащую ниже прямой  $OD_1$ , хотя из лежащей там точки мы могли бы теоретически достичь цели в плановый срок. Тем не менее, минимальная скорость «производства» результата (она может быть и отрицательной, если рассматривается не только наращивание результата, но допускается и его уменьшение) понимается нами как оценка надежности объекта, движение с еще меньшей скоростью следует понимать как возникновение маловероятных чрезвычайных обстоятельств, которые могут привести и к разрушению самого объекта.

Именно поэтому наше количественное определение риска должно предусматривать и стремление его к бесконечности при приближении объекта к отрезку  $OD_1$ . Таким образом, ломаная  $OD_1C$ , выделенная жирно на рис. 3, является границей запретной зоны.

Следуя части [1], за величину риска для точки  $M$  с координатами  $(t_1, A_1)$  мы принимаем расстояние:

$$r(M) = \max \left\{ \ln \frac{1}{1-d_1}, \ln \frac{1}{1-d_2} \right\}, \quad d_1 = \frac{\varepsilon_1(1-\mu_1)}{\mu_1(1-\varepsilon_1)}, \quad d_2 = \frac{\varepsilon_2(1-\mu_2)}{\mu_2(1-\varepsilon_2)}, \quad \text{где:}$$

$$\varepsilon_1 = |E_1E_2|, \quad \mu_1 = |E_1M|, \quad \text{при этом}$$

$$1-\varepsilon_1 = |E_2E_3|, \quad 1-\mu_1 = |E_3M|;$$

$$\varepsilon_2 = |F_1F_2|, \quad \mu_2 = |F_1M|, \quad 1-\varepsilon_2 = |F_2F_3|, \quad 1-\mu_2 = |F_3M|.$$

Поясним смысл точек  $T_1$  и  $T_2$  на рис. 3. Очевидно, что в задачах управления, когда состояние объекта описывается в терминах «время-результат», очень важно нахождение точек контроля, которые могут быть также моментами времени для принятия решения о применении управляющих воздействий или пересмотра параметров цели.

Организация системы контроля должна удовлетворять двум противоречивым требованиям: точек контроля не должно быть слишком много (за это приходится платить), но их не должно быть слишком мало (за это приходится расплачиваться ситуацией, когда что-либо менять уже поздно).

Теоретически объект мог сразу двигаться с максимальной скоростью по прямой  $OB$  и к моменту  $T_1$  попасть в точку  $B_1$ , после чего даже движение с минимальной скоростью позволяет вовремя достичь цели. Очевидно поэтому, что до момента  $T_1$  контролировать объект не имеет практического смысла.

После же момента времени  $T_2$  объект может оказаться в запретной области и контроль потеряет смысл.

Итак в дальнейшем, решая задачу о целесообразности реорганизации портфеля активов, мы будем искать первый момент времени для принятия решения на отрезке  $[T_1, T_2]$ .

**III-2.** Ранее мы уже рассматривали простейший метод формирования портфеля (двухсторонних оценок). Здесь же мы последовательно опишем некоторый алгоритм формирования и управления портфелем, позволяющий объединить принципы раздела II в [1] и пункта III.1. Как будет следовать из дальнейшего изложения, практически на каждом шаге возникают возможности изменения (обобщения, усложнения) алгоритма ; на некоторые возможные модификации мы укажем в следующем разделе.

Шаг 1. Задаем  $N$  активов, из которых мы хотели бы выбрать  $n$  активов, формирующих портфель.

Шаг 2. Задаем границу надежности  $\gamma$ .

Шаг 3. Выбираем  $n$ -схему с функцией Шеннона  $h(p) > \gamma$  при достаточно малых значениях вероятности  $p$ . Составляем закон распределения для числа реле в маршрутах, по которым может пройти ток.

Шаг 4. Обозначим через  $p_0$  минимальное значение  $p$ , при котором  $h(p) > \gamma$ , и проведем первый этап формирования портфеля. Для этого обозначим через  $\alpha_N^n$  ансамбль  $n$  активов из общего набора в  $N$  активов. Для каждого такого ансамбля обозначим через  $R_1, R_2, \dots, R_n$  доходы единиц актива за время  $t_{нл.}$ , которые могут быть получены с вероятностью, не меньшей чем  $p_0$ .

Пусть  $S_i$  - стоимость единицы  $i$ -го актива,  $m_i$  - искомое количество этих единиц,  $B$  - бюджет, отпущенный на формирование портфеля.

Решаем следующую задачу оптимизации:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n m_i S_i \leq B \\ \min\{m_k R_k\} \rightarrow \max \end{array} \right., m_k \in \mathbb{N}.$$

**Комментарий.** Разумеется, полный перебор всех вариантов выбора  $n$  активов из  $N$  заданных (шаги 1 – 4 алгоритма) практически неосуществим. Поэтому необходимо пользоваться некоторыми специальными методами, существенно ограничивающими перебор.

Остановимся вкратце лишь на двух из них:

- а) Проранжируем все  $N$  активов по неубыванию  $\frac{V_i - V_i^{\min}}{V_i^{\max} - V_i^{\min}}$ , где  $V_i$  - средняя скорость изменения дохода за одну торговую сессию для  $i$ -го актива,  $V_i^{\max}, V_i^{\min}$  - соответственно максимальная и минимальная скорости для этого актива. Рассматриваем первые наилучшие  $(n+k)$  активов, где  $k$  сравнительно невелико и перебираем все  $C_{n+k}^n = C_{n+k}^k$  вариантов.
- б) Для набора из всех  $C_N^n$  вариантов рассматривается разумное с вычислительной точки зрения количество активов, выбор которых осуществляется с помощью ЛП $\tau$  последовательностей [3], обладающих свойствами равномерности.

Прежде, чем перейти к описанию следующих шагов алгоритма, остановимся на некоторых важных моментах. Из каждого ансамбля  $\alpha_N^n$  мы получаем допустимый портфель  $P_N^n$ , для которого через  $R(P_N^n)$  обозначим экстремум, найденный на шаге 4.

Для каждого допустимого портфеля считаются выполненными условия, при которых справедлив принцип существования подпортфеля с почти гарантированным доходом, сформулированный в разделе II из [1].

Для каждого допустимого портфеля может быть построен аналог схемы движения к цели, изображенной на рис. 3. При этом за  $V_{\min}$  принимается  $\frac{mR(P_N^n)}{t_{нл}}$ ,

а за  $A_{нл}$  может быть принято, например, число  $R(P_N^n) \cdot \bar{X}$ , где  $\bar{X}$  - математическое

ожидание случайной величины, рассмотренной на шаге 3. За  $V_{\max}$  можно принять

величину  $\frac{nR(P_N^n)}{t_{нл.}}$ .

Отдельного обсуждения при этом заслуживает выбор  $n$ -схемы Шеннона (шаг 3). Этот выбор должен в той или иной степени удовлетворять нескольким условиям.

Во-первых, желательно минимизировать  $n$ , но получить при этом возможно большее  $m$ .

Во-вторых, схема тем удобнее, чем меньше значение  $p^*$ , являющееся корнем уравнения  $h(p) = \gamma$ ; уменьшение  $p^*$  позволяет, в свою очередь, добиться увеличения числа  $mR(P_N^n)$ .

Например, табулирование некоторых функций Шеннона дает такие результаты.

Пусть  $h(p)$  - функция Шеннона 8-схемы, получающаяся, как суперпозиция функции  $p^2(2-p^2)$  и функции  $p(2-p)$ . Тогда  $h(0,6) = 0,91$ ,  $h(0,7) = 0,97$ . 8-схема удобна, например, для российского рынка «голубых фишек», однако значительный доход с вероятностью 0,6, а тем более 0,7, получить весьма трудно.

Если же  $h(p)$  - функция Шеннона 12-схемы, получающаяся, как суперпозиция функции  $p^2(2-p^2)$  и функции  $p(1-p)^3$ , то  $h(0,45) = 0,907$ ,  $h(0,51) = 0,951$ , что позволяет повысить  $R(P_N^n)$ . Еще лучший результат ( $h(0,42) = 0,916$ ,  $h(0,47) = 0,951$ ) дает функция Шеннона 15-схемы, получающаяся суперпозицией функций  $2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2$  и  $p(1-p)^3$ .

Остановимся отдельно на вопросе о практическом вычислении вероятностей, используемых в подборе схемы Шеннона. Можно наметить два разных подхода:

- обрабатывается массив данных с периодом  $t_0$ , при том, что  $t_{нл.} = kt_0$ ,  $k$  - натуральное число;
- обрабатывается массив данных с периодом  $t_{нл.}$ .

Эти подходы действительно разные. Допустим, например, что  $t_0$  - это один день торговой сессии,  $t_{нл.}$  - 30 дней, а обрабатывается массив за 300 дней. Пусть

также среди этих 300 дней один был форс-мажорным, с резким падением курса. При первом подходе значимость этого дня невелика. При втором, когда мы используем суммарный доход идущих подряд 30-ти дней, сдвигаясь каждый раз на один день, влияние «негативного» дня возрастает, поскольку он фигурирует в 30-ти массивах из имеющихся 270-ти.

В конечном итоге, выбор метода зависит от склонности инвестора к риску; можно рекомендовать использовать оба подхода и ориентироваться на более пессимистический результат.

Упомянем ещё, что могут быть использованы разнообразные методы обработки временных рядов и технического анализа [4]; оценка целесообразности применения того или иного метода выходит за рамки этой работы.

Шаг 5. Для каждого допустимого портфеля  $P_N^n$  находим аналоги точек  $T_1$  и  $T_2$ .

Точка  $T_1$  есть абсцисса точки пересечения прямых:

$$OB: A = \frac{nR(P_N^n)}{t_{нл.}}t; \quad B_1C: A = A_{нл.} + \frac{mR(P_N^n)}{t_{нл.}}t - mR(P_N^n), \quad \text{т.е.} \quad T_1 = \frac{t_{нл.}(\bar{X} - m)}{n - m}.$$

$$\text{Аналогично: } T_2 = \frac{t_{нл.}(n - \bar{X})}{n - m}.$$

**Комментарий.** Координаты точек  $T_i$  ( $i=1,2$ ) зависят от  $t_{нл.}$ , от числа  $m$ , полученного из принципа сопоставления, и, кроме того, еще от вероятности, найденной на шаге 4. Отметим здесь ещё раз, что, вообще говоря,  $R(\alpha_N^n)$  при уменьшении этой вероятности растет, однако при этом мы ограничены условием  $h(p) > \gamma$ .

Шаг 6. Для каждого допустимого портфеля  $P_N^n$  находим величину

$$\rho(P_N^n) := \min_{t \in [T_1, T_2]} r(M(t)) = \min_{t \in [T_1, T_2]} \max \left\{ \ln \frac{1}{1 - d_1(M(t))}; \ln \frac{1}{1 - d_2(M(t))} \right\}, \quad \text{где } M(t) -$$

точка на прямой  $A = \frac{A_{нл.}}{t_{нл.}}t = \frac{R(P_N^n)\bar{X}}{t_{нл.}}t$ .

Шаг 7. Среди всех допустимых портфелей выбираем тот, который доставляет решение двухкритериальной оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} \rho(P_N^n) \rightarrow \min \\ R(P_N^n) \rightarrow \max \end{cases}$$

**Шаг 8.** У найденного на предыдущем шаге портфеля есть точка  $t^*$  из промежутка  $[T_1, T_2]$ , в которой достигается описанный выше оптимум. Необходим мониторинг состояния каждого актива до этого момента времени. Цель мониторинга: проверка выполнения для активов условий предыдущих шагов. Если эти условия хотя бы для одного из активов не выполняются, то необходимо сразу повторить все предыдущие шаги алгоритма с целью реформирования портфеля.

**Шаг 9.** Если все активы до момента времени  $t^*$  удовлетворяли описанным выше требованиям, то все шаги алгоритма повторяются в момент  $t^*$ . При этом, вообще говоря, реформированный портфель может и совпасть с предыдущим.

**Замечание 1.** Момент реформирования портфеля рассматривается как момент  $t = 0$  с задачей достижения в оставшееся время оставшейся доли от запланированного результата.

**Замечание 2.** Очевидно, что если цель задана точкой, как на рис. 3, то моментов возможного реформирования может быть бесконечно много. Однако на практике – и это обеспечивает конечность процесса, цель всегда указывается как некоторая область (подробнее об этом см. в следующем разделе).

**Комментарий.** Условие принадлежности точки  $M(t)$  прямой  $A = \frac{R(P_N^n)\bar{X}}{t_{нл.}}t$  (шаг 6) не является, разумеется, единственно возможным. Можно рассматривать, например, лежащий между вертикалями  $t = T_i$  ( $i = 1, 2$ ) отрезок прямой  $A = V_{cp} \cdot t$ , где  $V_{cp}$  – средний доход портфеля  $P_N^n$  за один период, посчитанный на основе статистических данных. Можно также рассматривать любую ломаную (или кривую), отражающую волатильность портфеля.

**III. 3.** Опишем схематично метод, позволяющий прогнозировать с помощью схем Шеннона изменение рыночного индекса.

Предположим для простоты, что прогноз составляется на период, равный одному дню. Предположим также, что множество мощности  $N$  единичных активов (акций), включаемых в определение индексов (например, S&P500,  $N=500$ ; FTSE2500,  $N=2500$ ), удовлетворяет следующему условию: существует разбиение  $(\Sigma; N, n)$  множества  $N$  на  $n$  агрегированных единичных активов (элементарных портфелей), каждый из которых принесет доход одного и того же знака.

Шаг 1. Зададим надежности  $\gamma_i (i = 1, 2)$  и длину промежутка неопределенности  $\Delta$ .

Шаг 2. Подберем  $n$ -схему Шеннона, функция  $h(p)$ , которой удовлетворяет условие:  $c - a \leq \Delta$ , где  $h(a) = \gamma_1, h(c) = \gamma_2$ .

Шаг 3. Рассмотрим всевозможные разбиения  $(\Sigma; N, n)$ , такие, что каждый их агрегированный единичный актив (элементарный портфель) может принести в течение следующей торговой сессии доход, не меньший, чем  $R_{\Sigma}^{(1)}$  с вероятностью, большей, чем  $c$ , и доход не меньший, чем  $R_{\Sigma}^{(2)}$  с вероятностью меньшей, чем  $a$ .

При положительности доходов,  $R_{\Sigma}^{(2)} > R_{\Sigma}^{(1)}$ ; при отрицательности  $R_{\Sigma}^{(2)} < R_{\Sigma}^{(1)}$ .

Шаг 4. Среди всех разбиений шага 3 выберем то, у которого  $R_{\Sigma_0}^{(1)} = \max_{(\Sigma; N, n)} \{R_{\Sigma}^{(1)}\}$ .

Шаг 5. Воспользуемся принципом существования подпортфеля с почти гарантированным доходом  $mR_{\Sigma_0}^{(1)}$ . Пересчитаем этот доход в почти гарантированную на следующую торговую сессию доходность рыночного портфеля (= доходности исходного множества  $N$  единичных активов). Укажем прогнозное значение изменения индекса на следующую торговую сессию.

**Комментарий 1.** Известно, что крупные аналитические агентства публикуют прогнозы изменения рыночных индексов, причем это имеет значение не только для рынка базовых биржевых инструментов, но и для рынка деривативов, для которых индекс сам является базовым инструментом. Нам, к сожалению, неизвестно какими методами пользуются агентства для своих прогнозов и какова степень обоснованности этих методов. Предлагаемая нами схема позволяет, с

одной стороны, почти гарантированное изменение индекса, а, с другой стороны, согласно теореме Шеннона, даёт возможность найти изменение, которое может произойти лишь с очень малой вероятностью. Промежуток между двумя этими значениями как раз и соответствует промежутку неопределенности для схем Шеннона.

Разумеется, можно указать набор уровней изменения индекса и оценить их вероятности; подробнее об этом мы надеемся рассказать в других публикациях.

**Комментарий 2.** Методы классификации [5] позволяют осуществить разбиение  $N$  активов на  $n$  групп, с равными средними значениями. Однако в нашем случае использование этих методов ограничено выполнением двух дополнительных условий. Во-первых, групп должно быть не меньше, чем количество элементов, необходимое для соответствующей схемы Шеннона. Во-вторых, вероятности, с которыми элементарные портфели приносят примерно один и тот же доход, должны быть такими, что их минимум удовлетворяет условиям шага 3 алгоритма.

**Комментарий 3.** Рассмотренный алгоритм без существенных изменений может быть обобщен и на случай нескольких периодов. Отметим лишь, что оценка вероятности при изменении рыночного портфеля должна учитывать весьма существенное отличие отдаленных периодов от близлежащих.

## **Часть IV. Некоторые модификации и направления развития.**

### **IV.1. Другие виды оценок управляемости.**

В разделах I ([1]) и III мы приводили аргументы в пользу рассмотрения в качестве меры угрозы потери управляемости проективного расстояния до запретной области, которое определяется через трудность достижения цели  $d(\varepsilon, \mu)$ . Сохраняя основы этого подхода, мы можем несколько видоизменить способы вычисления трудностей. В частности, в работе [6] рассмотрены модификации формул для свертки трудностей, позволяющие включать в портфель

недостаточно хорошие активы, такие, что за счет других составляющих характеристика целого портфеля останется приемлемой для достижения цели.

Необходимость включения в портфель априори недостаточно качественных активов может возникнуть, например, тогда, когда количество "хороших" активов недостаточно для сопоставления портфеля с  $n$ -схемой Шеннона ( $n$  – велико), либо, если "хорошие" активы слишком дороги и не могут быть использованы из-за бюджетных ограничений.

#### **IV.2. Расстояние, информация, стоимость.**

Упомянутое выше проективное расстояние  $\ln \frac{1}{1-d}$  имеет также прозрачную аналогию с шенноновским определением информации [7], которое в нашем случае является информацией о положении системы относительно запретной зоны.

Как известно, Шеннон ввел свое определение информации, как  $\ln \frac{1}{p}$ , основываясь на том, что мера информации должна быть аддитивна, в отличие от вероятностей, которые являются мультипликативными для совместно происходящих событий. Свойству аддитивности удовлетворяет ещё одна важная характеристика – стоимость. В этом смысле, должна просматриваться цепочка соответствий: проективное расстояние как информация о трудности достижения цели эквивалентна информации о положении системы относительно запретной области; эквивалентна риску как мере угрозы потери управляемости и эквивалентна стоимости (затратам) на сохранение управляемости а, следовательно, стоимости возможности достижения цели.

Придание этой цепочке строгого формального и модельного смысла представляется весьма интересной задачей, решение которой позволило бы трактовать портфель активов как систему, рыночная стоимость которой находится в функциональной зависимости от затрат на управление ею. При этом, согласно формуле (1):  $\varphi(f(d_1, d_2)) = \varphi(d_1) + \varphi(d_2)$ , т.е. "стоимость" управления по совокупности факторов равна сумме "стоимостей" управления по каждому.

#### **IV.3. Качество исходной информации.**

Разумеется, что по своей сути описанные методы являются стохастическими. Тем не менее, процесс формирования и управления может быть разделен на две части: первая часть – оценка значения вероятности  $p$  (и, в связи с этим, выбор схемы Шеннона) носит сугубо вероятностный характер; вторая же часть – все остальные шаги метода – детерминированы. В связи с этим решающее значение приобретает точность оценки  $p$ , а это означает тщательный и возможно дорогостоящий анализ большого количества активов. Здесь важен не только выбор метода анализа временных рядов, но и качество информации, по которой производится оценка.

#### IV.4. Расположение активов в аналоговой $n$ -схеме.

На протяжении всей работы мы предполагали, что каждый из  $n$  активов  $n$ -схемы Шеннона должен приносить доход не меньший, чем одна и та же величина  $R$ . При таком допущении не имеет никакого значения способ соответствия активов элементам  $n$ -схемы Шеннона, т.е., грубо говоря, неважно, на каком месте схемы мы располагаем тот или иной актив. Этот подход, с одной стороны, упрощал проблему формирования портфеля, но с другой стороны, заставлял решать "лишнюю" оптимизационную задачу подбора величин  $m_k$  (шаг 4 в алгоритме).

Отказ от этого допущения может дать, например, возможность увеличения почти гарантированного дохода за счет оптимального "расположения" активов на аналоговой схеме.

Для иллюстрации рассмотрим простой пример.

Возьмем 4-схему, когда на каждой из 2-х ветвей расположены по два актива. Пусть значения доходов различны и равны, например, 1, 2, 3, 4. Тогда существуют лишь три отличающиеся друг от друга способа расположения активов по элементам схемы. Они изображены на следующем рисунке:

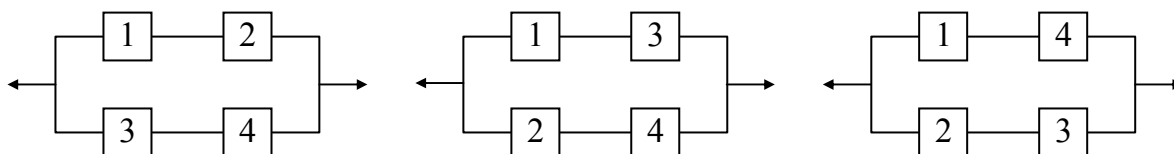


Рис. 4.

В таблице (рис. 5 ниже), с помощью которой выбирается оптимальное решение, столбцы  $F_1, F_2, F_3$  соответствуют трем возможным вариантам срабатывания схемы:

- 1) срабатывают обе ветви;
- 2) первая срабатывает, а вторая нет;
- 3) первая не срабатывает, а вторая срабатывает.

Над столбцами записаны вероятности соответствующих событий. При этом, согласно принципам сопоставления и существования подпортфеля с почти гарантированным доходом, не учитывается возможность несрабатывания обеих ветвей, так как это событие имеет вероятность  $1-h(p)$ , величина которой для рассматриваемых значений  $p$  пренебрежимо мала. Строки матрицы  $E_1, E_2, E_3$  соответствуют трем способам расстановки активов, согласно рис. 4. На пересечении данных строки и столбца стоит величина получаемого дохода, зависящая от способа расстановки и варианта срабатывания схемы.

Продолжением основной таблицы служат результаты выбора наилучшего решения о расстановке активов по пяти различным критериям:

MM – maxmin – критерий, предписывающий выбор решения, для которого минимальный по каждой строке результат максимизируется;

NW – критерий Гурвица, по которому устанавливается некоторый  $0 \leq \alpha \leq 1$  уровень "оптимизма" и выбирается решение с максимальным значением выпуклой линейной комбинации между максимальным и минимальным элементами в каждой строке;

BL – критерий Байеса – Лапласа, по которому выбирается максимальная величина математического ожидания выигрыша по каждой строке;

S – критерий Сэвиджа – минимизирует максимальное "сожаление" от принятого решения, которое вычисляется как разность между максимальным и реальным доходом по столбцу;

П – критерий произведения – требует перемножения элементов каждой строки и выбора решения, соответствующего максимуму полученных величин.

$P$	$p^4$	$p^2(1-p)$	$p^2(1-p)$				S			max	П
$F$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	MM	HW	BL					
$E$											
$E_1$	10	3	7	3	$10\alpha + 3(1-\alpha)$	$10h(p)$	0	2	0	2	210
$E_2$	10	4	6	4	$10\alpha + 4(1-\alpha)$	$10h(p)$	0	1	1	<b>1</b>	240
$y_1$	10	5	5	<b>5</b>	$10\alpha + 5(1-\alpha)$	$10h(p)$	0	0	2	2	<b>250</b>

Рис. 5.

Заметим, что сумма вероятностей для событий  $F_1, F_2, F_3$  равна  $h(p)$ . По трем критериям (MM, HW, П) оптимальным оказывается третий вариант расстановки активов, выравнивающий суммы доходов по ветвям. Критерий BL не позволяет осуществить какой – либо выбор, а по S – критерию наилучшая расстановка соответствует решению  $E_2$ . Оптимальные значения отмечены в соответствующих столбцах.

Можно было рассмотреть и другие критерии выбора [8], но уже из рассмотренного примера видно, что главным является выбор самого критерия, а задача выбора способа расстановки активов по элементам схемы портфеля является вторичной.

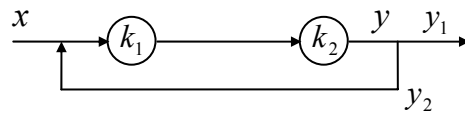
#### IV.5. Нерелейные схемы.

Представляется весьма перспективным использование в теории управления портфелем аналоговых схем, элементами которых являются, например, усилители. Если допустить, что на одной из веток схемы расположены два актива, причем прибыль, полученная от первого, инвестируется во второй, то общий доход ветки будет равен:

$$k_2(k_1 - 1)x_1 + (k_2 - 1)x_2 > (k_1 - 1)x_1 + (k_2 - 1)x_2,$$

где  $k_1 > 1, k_2 > 1$  – коэффициент наращивания (усиления) стоимости первого и второго актива соответственно, а  $x_1$  и  $x_2$  – стоимости активов.

Можно также рассмотреть схему из 2-х усилителей с обратной связью:



Финансовый поток на выходе  $y$  разделяется на две части  $y = y_1 + y_2$ , где  $y_2 = \alpha y$  ( $0 < \alpha < 1$ ) – инвестиционная составляющая, направленная на вход первого элемента схемы. Легко получить выражение:

$$y = \frac{k_1 k_2 x}{1 - \alpha k_1 k_2}, \text{ при } \alpha k_1 k_2 < 1 \text{ вся схема работает как эффективный усилитель.}$$

Нам неизвестен метод построения надёжных схем из элементов этого типа, но, очевидно, что появление таких методов повлечёт за собой возникновение новых эффективных стратегий управления портфелем активов.

#### IV.6. Стоимость переформирования, резервы.

В описании алгоритма формирования и управления портфелем (раздел III) мы не останавливались подробно на затратах, связанных с переформированием портфеля. Оценить первоначально эти затраты затруднительно. Здесь можно предложить следующий достаточно простой, но, как нам представляется, эффективный способ. К набору критериев оптимизации (или к набору ограничений) можно добавить ещё один. Рассмотрим прямую  $A = V_{cp.} \cdot t$ , где  $V_{cp.}$  - имеет для портфеля тот же смысл, что и  $V_{cp.}^i$  для актива в разделе III. Пусть заданы числа  $0 < \alpha < \beta < 1$  и должно быть выполнено условие  $\alpha B_{фор.} \leq B_{рез.} \leq \beta B_{фор.}$ ; здесь  $B_{фор.}$  - бюджет формирования портфеля,  $B_{рез.}$  - бюджет резерва.

Положение точки  $M_{cp.}(t^*)$  на прямой  $A = V_{cp.} \cdot t$  определяет долю бюджета формирования, отпущенную на бюджет резерва. Для каждого портфеля момент  $t^*$  имеет тот же смысл, что и точка оптимума (шаг 8 алгоритма).

#### IV.7. Вершины параллелограмма управления.

Мы определяли вершины  $B_1$ ,  $C$  и  $D_1$  параллелограмма на рис. 3, исходя из того, что  $A_{нл.} = R(P_N^n)\bar{X}$ , а  $V_{\max} = \frac{nR(P_N^n)}{t_{нл.}}$ . Разумеется, за  $A_{нл.}$  можно принимать, например, наиболее вероятный (а не средний) доход, а за  $V_{\max}$  другую величину, вероятность появления которой выше, чем  $p^n$ .

#### **IV.8. Управление по отклонениям.**

Легко видеть, что «отклонение от границ опасных зон» выступает как один из основных принципов управления портфелем. Отсюда следует, что при любом способе вычисления  $V_{\min}$ ,  $V_{\max}$  и  $A_{нл.}$  минимизация трудности сохраняет свою главенствующую роль, т.е. эти параметры не обязаны вычисляться с помощью схем Шеннона. Кроме того, для осторожного инвестора можно рекомендовать оценку состояния портфеля во времени более частую, чем это следует из алгоритма. Сигналом для переформирования портфеля может служить, например, его попадание в область, лежащую ниже прямой  $A = \frac{A_{нл.}}{t_{нл.}}t$ .

Отметим, что в нашем определении минимизируемой величины  $r(M(t))$  (см. шаг 6, пункта III.2) мы придавали одинаковый вес угрозе приближения к прямой  $CD_1$  и к прямой  $OD_1$ , хотя на самом деле попадание в  $CDD_1$  делает ситуацию безнадёжной, а область, лежащая ниже прямой  $OD_1$  оставляет маловероятную возможность достижения точки  $C$ . По-видимому, естественнее было бы рассматривать  $r(M(t))$  как выпуклую комбинацию двух расстояний, причём расстояние до  $CD_1$  имеет больший вес, чем расстояние до  $OD_1$ .

Но нам пока неизвестны никакие априорные соображения, которые позволили бы найти коэффициенты этой комбинации.

#### **IV.9. Декомпозиция портфелей.**

Мотивацией к декомпозиции портфеля могут служить следующие соображения (для наглядности рассмотрим портфель из 8-ми активов, 8-схемой Шеннона для которого служит схема №4 [1; приложение 3]):

- рассматривая 2 портфеля (верхняя ветка и нижняя ветка), мы можем считать минимальной скоростью для всего портфеля  $\frac{4R}{t_{нл.}}$ , в то время как для всего портфеля эта скорость равна  $\frac{2R}{t_{нл.}}$ ; уменьшение угла между прямыми  $OD$  и  $OB$  ужесточает условия управления, но может привести к увеличению дохода;
- в описании алгоритма мы говорили о необходимости переформирования всего портфеля, если хотя бы один из активов перестал быть приемлемым. При декомпозиции нам достаточно переформировать один из подпортфелей.

Число подобных аргументов можно легко увеличить, задача об оптимальной декомпозиции представляется весьма интересной, но здесь мы остановимся подробнее на другом аспекте этой проблемы. Речь идёт о МППС (например, 5-ти элементная мостиковая схема (№5, [1; приложение 3])), которая, как представляется на первый взгляд, декомпозицию не допускает.

Здесь, однако, можно воспользоваться равенством Шеннона:

$h(p) = pf(p) + (1-p)g(p)$ , где  $f(p)$  – функция Шеннона для схемы с перемычкой, а  $g(p)$  – функция Шеннона для схемы №6 [1; приложение 3]. Использовать это представление можно, например, в следующем варианте: считая, что каждый актив в 5-МППС разбивается на две доли  $\omega$  и  $(1-\omega)$ ,  $0 \leq \omega \leq 1$ , после чего рассмотреть управление двумя портфелями:

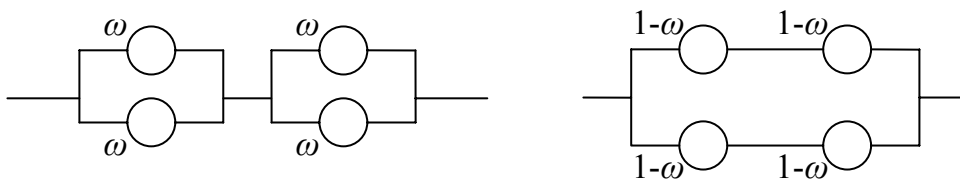


Рис. 6.

Заметим, что математическое ожидание числа маршрутов срабатывания первой схемы (рис. 6) при любой вероятности  $p$  строго больше, чем для второй схемы; поэтому можно за счет подбора доли  $\omega$  сделать раздельное управление портфелями более выгодным, с точки зрения достижения цели, чем управление с помощью 5-МППС.

#### IV.10. Портфель как замкнутая термодинамическая система. Брокер как демон Максвелла.

Максвеллу принадлежит идея следующего мысленного эксперимента. В замкнутом объеме, разделенном на две части перегородкой, "демон" открывает дверцу, пропуская в одну из частей быстрые молекулы, и закрывает эту же дверцу перед медленными. Тогда через некоторое время можно было бы достичь значительной разности температур и за этот счет удалось бы проделать некоторую работу.

Только в 50-е годы прошлого века стало окончательно понятно, что такой эффект невозможен, поскольку энергия, требуемая на оценку скорости молекул (по доплеровскому смещению) превышает энергию, которую можно было бы получить за счет разностей температур в двух частях объёма.

Символично, что примерно в это же время появились первые работы Марковица по проблемам фондового рынка. Но на самом деле аналогия между фондовым рынком и термодинамикой замкнутых и открытых систем значительно более глубокая.

Допустим, что мы хотели бы поручить брокеру работу демона Максвелла, т.е. отбор самых "хороших" активов и отсеивание всех "плохих". Очевидно, что затраты на такое распознавание (сбор информации, анализ и прогноз) превысят, при отсутствии доступа к инсайдерской информации, возможный гарантированный доход. В предыдущем изложении одним из подтверждений этого был тот факт, что сужение промежутка неопределенности влекло за собой увеличение трудности  $d$ . Другим подтверждением является то, что приближение к цели (см. рис. 3), вообще говоря, влечет за собой и приближение к запретной области, т.е. увеличение энтропии  $\ln \frac{1}{1-d}$ . В этом смысле второй закон термодинамики действует весьма наглядно; только попадание за время меньшее, чем  $t_{nl}$ , на прямую  $CB_1$  позволяет приближаться к цели без увеличения энтропии. Но, очевидно, что движение по такой траектории крайне маловероятно и если даже может быть осуществлено, то со значительными затратами на оптимизацию отбора и на частые переформирования портфеля.

Кроме того, из общих соображений понятно, что цель брокера состоит в минимизации энтропии портфеля, а рынок же в целом (как внешняя среда) стремится энтропию увеличить.

Эти соображения показывают, что качественным формальным аналогиям между фондовым рынком и термодинамикой больших систем следует придавать строгий смысл.

#### **IV.11. Соотношение неопределенности.**

Очевидно, что вычисление всех параметров, определяющих положение портфеля как точки на плоскости  $(A, t)$  невозможно производить со сколь угодно большой точностью. Это относится и к вычислению значений  $R$  и  $p$ , и к определению стоимости портфеля в любой точке переформирования (из-за транзакционных запаздываний).

Отсюда следует, что и сама цель формирования и управления портфелем активов является не точкой, а некоторой областью на плоскости  $(A, t)$ . Заметим, что это соображение позволяет сделать процесс управления конечным, так как в противном случае (точечной цели) количество необходимых переформирований бесконечно.

В связи с этим возникает естественная аналогия с принципами неопределенности в квантовой механике и в гармоническом анализе, которые, в самом общем смысле, утверждают, что одновременная локализация объекта по определяющим его параметрам невозможна. Это приводит к соотношениям неопределенности, которые, например, в квантовой механике, дают оценку снизу для произведения приращений координат и импульса. Аналог такого соотношения для фондового рынка, скорее всего, должен выглядеть как ограничение снизу на размер области плоскости  $(A, t)$ , в которой может находиться каждый актив и портфель в целом. По нашему мнению, не следует ожидать, что в качестве такого ограничения будет выступать некоторая универсальная константа – хотя бы потому, что степень волатильности рынка окажет существенное влияние на размеры области неопределенности.

Отметим в заключение, что, согласно неравенству Рао – Крамера [9], одновременное точное вычисление дисперсии и математического ожидания

случайной величины на основании статистических данных невозможно, поэтому область неопределенности возникает даже при использовании классической модели Марковица – Тобина – Шарпа.

## Литература

- 1.
2. Бабунашвили М.К., Бермант М.А., Руссман И.Б. Контроль и управление в организационных системах // Экономика и математические методы. - 1969. – Т.V. - №2. – С. 272 – 284.
3. Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981. – 107 с.
4. Энциклопедия технических индикаторов рынка. – М.: Издательский дом "Альпина", 1997. – 581с.
5. Миркин Б.Г. Анализ качественных признаков. – М.: "Статистика"., 1976. – 164с.
6. Леденева Т.М. Моделирование процесса агрегирования информации в целенаправленных системах. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 1999. – 160с.
7. Шеннон К. Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетике. –М.: Наука, 1963. - С. 243 -332.
8. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. – М.: "Мир", 1990. – 206с.
9. Ерешко А.Ф. Методы декомпозиции и локально – оптимальные стратегии в задачах управления портфелем ценных бумаг // Сообщения по прикладной математике. ВЦ РАН. 2002. – 79с.